Clasa a XI-a (profil real, specializarea ştiinţe ale naturii)

Disciplina: Matematică

TEOREMA LUI FERMAT

Fişă de lucru (de fixare şi consolidare)

1) Pentru fiecare din funcţiile de mai jos analizaţi aplicabilitatea teoremei lui Fermat:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 6x + 10$;

b) $f: [0, 5] \to \mathbb{R}, f(x) = 4x + 7$;

c) $f: (-2, 2) \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 3$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 4|$;

g) $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 3x - 4|$;

h) $f: (-1, 2) \to \mathbb{R}, f(x) = |-2x^2 - 5x + 2|$.

2) Se consideră funcţia $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \ln(x+1) + x + 1, & x > 0 \end{cases}$. Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Fermat în punctul $x_0 = 0$.
3) Se consideră funcţia $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$. Să se verifice aplicabilitatea teoremei lui Fermat în punctul $x_0 = 0$.
4) Dacă a, b, c, d sunt numere reale strict pozitive şi $a^x + b^x \geq 2, (\forall)x \in \mathbb{R}$, atunci $a \cdot b = 1$.
5) Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ astfel încât $a_1 {b_1}^x + a_2 {b_2}^x \geq a_1 + a_2, (\forall)x \in \mathbb{R}$. Să se arate că ${b_1}^{a_1} \cdot {b_2}^{a_2} = 1$.
6) Fie $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $i = \overline{1, n}$, astfel încât $a_1 {b_1}^x + \cdots + a_n {b_n}^x \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Să se arate că ${b_1}^{a_1} \cdot {b_2}^{a_2} \cdot \ldots \cdot {b_n}^{a_n} = 1$.
7) Să se determine valoarea parametrului $a > 0$, astfel încât să fie valabilă inegalitatea
$2^x + a^x \geq 3^x + 4^x$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.
8) Să se determine valoarea parametrului $a > 0$, astfel încât să fie valabilă inegalitatea
$2^x + a^x \geq 2$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.
9) Să se arate că există cel puţin un număr real $a > 0$ cu proprietatea că :
   a) $a^x \geq 3x + 1, (\forall)x \in \mathbb{R}$;
   b) $\ln x \geq a\frac{x-1}{x}$, $(\forall)x > 0$.
10) Fie $a > 0$ şi $a^x \geq x + 1, (\forall)x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $a = e$.
11) Fie $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Dacă $a^x \geq ax, (\forall)x \in \mathbb{R}$, atunci $a = e$.
12) Fie $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Dacă $a^x \geq x^a, (\forall)x \in \mathbb{R}$, atunci $a = e$.
13) Fie $a, b > 0$ astfel încât $\frac{a^x + b^x}{(a+b)^x} \geq 2^{1-x}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $a = b$.
14) Se consider funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x), f(x) = 6^x + a^x - 14^x - 15^x$, unde $a > 0$.
   a) Calculaţi $f(0)$ şi $f'(0)$;
   b) Să sedetermine $a > 0$ astfel încât $f(x) \geq 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$.