FISA DE LUCRU. PUNCTE DE EXTREM

1. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R$ definită prin $f(x)=x-2\ln x$.
   a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in(0;+\infty)$
   b) Să se demonstreze că funcţia f este convexă pe intervalul $(0;+\infty)$.
   c) Să se demonstreze că $f(x)\geq \ln\frac{e^2}{4},\ \forall x\in(0;+\infty)$
2. Se consideră funcţia $f:R\setminus\{-1\}\to R$ definită prin $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.
   a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2},\forall x\in R\setminus\{-1\}$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei f.
   c) Să se demonstreze că $f(x)\geq 1$, pentru $\forall x>-1$.
3. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to R$ definită prin $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.
   a) Să se calculeze $f'(e)$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului f.
   c) Să se demonstreze că $x^e\leq e^x$ pentru $\forall x>0$.
4. Se consideră funcţiile $f_n:R\to R$ date prin $f_0(x)=e^{-x}-1$ şi $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$ pentru $\forall n\in N$.
   a) Să se calculeze $f_1(x),\ x\in R$.
   b) Să se determine ecuaţia asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcţiei f_0.
   c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_2(x)+x-1}{x^2}$.
5. Se consideră funcţia $f:R^*\to R$ definită prin $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.
   a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in R$.
   b) Să se demonstreze că funcţia f este descrescătoare pe $(0;2]$.
   c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}}\leq 3e^{\sqrt{2}}$.
6. Se consideră funcţia $f:R\setminus\{1\}\to R$ definită prin $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$
   a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in R\setminus\{1\}$.

b) Să se demonstreze că funcţia f admite două puncte de extrem.
c) Să se determine ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcţiei f.

7. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.
a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se determine numărul punctelor de extrem ale funcției f.
c) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right)$.

8. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = e^x - x$.
a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$ pentru $\forall x \in R$.
c) Să se scrie ecuaţia asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcţiei f.

9. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + e^x$.
a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
b) Să se arate că funcţia f este convexă pe R.
c) Să se rezolve în R ecuaţia $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$.

10. Se consideră funcţia $f : (0;+\infty) \to R$ $f(x) = x^2 \ln x$.
a) Să se arate că $f'(x) = x(2\ln x + 1)$, $\forall x \in (0;+\infty)$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$.
c) Să se demonstreze că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$, pentru $\forall x > 0$.

11. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = x - \frac{1}{e^x}$.
a) Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.
b) Să se arate că funcţia f este concavă pe R.
c) Să se demonstreze că panta tangentei în orice punct graficul funcţiei f este mai mare decât 1.

12. Se consideră funcţia $f : R \to R$ $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$.
a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se determine $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
c) Să se demonstreze că funcţia f' este crescătoare pe R.

13. Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
a) Să se calculeze $f'(x), x \in R$.
b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Ştiind că $g : R^* \to R$ este funcţia definită prin $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, să se determine $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + ... + g(x^{2011}) + x^{2012}}{x^{2011}}$.

14.Se consideră funcţia $f : (1;+\infty) \to R$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in (1;+\infty)$.

b) Să se verifice că $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = -1$.

c) Să se arate că funcţia *f* este descrescătoare pe intervalul $(1;+\infty)$.

15.Se consideră funcţia $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + e^x$.

a) Să se verifice că $f'(0) = 1$.

b) Să se arate că funcţia *f* este convexă pe *R*.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{e^x}$.

16.Se consideră funcţiile $f, g : R \to R$, $f(x) = (x-1)e^x$ şi $g(x) = xe^x$.

a) Să se verifice că $f'(x) = g(x)$ pentru $\forall x \in R$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei *g*.

c) Dacă $I \subset R$ este un interval, să se demonstreze că funcţia *g* este crescătoare pe *I* dacă şi numai dacă funcţia *f* este convexă pe *I*.

17.Se consideră funcţia $f : (0;+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (x-2)\ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0;+\infty)$.

b) Să se determine $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că f' este crescătoare pe $(0;+\infty)$.

18.Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{x}, x \geq 0 \\ e^x, x < 0 \end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcţiei *f* în punctul $x_0 = 0$.

b) Să se determine ecuaţia asimptotei către $-\infty$ la graficul funcţiei *f*.

c) Să se demonstreze că funcţia *f* este concavă pe intervalul $(0;+\infty)$.

19.Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax-6, x < 4 \\ \sqrt{x}, x \geq 4 \end{cases}$, unde *a* este parametru real.

a) Să se determine valoarea reală a lui *a*, astfel încât funcţia *f* să fie continuă în punctul $x_0 = 4$.

b) Să se calculeze $f'(9)$.

c) Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei *f* în punctul $A(9;3)$.

20. a) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1}$.

b) Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-6x^2+18x+12$.

c) Să se determine semnul funcţiei $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(x^2-1\right)\ln x$.

a)

21. Se consideră funcţia $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

a) Să se verifice că $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$, pentru $\forall x>0$.

b) Să se determine asimptota verticală la graficul funcţiei f.

c) Să se demonstreze că $e^x\geq ex$ pentru $\forall x>0$.